Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

ZAMP Zentrum für Angewandte Mathematik und Physik

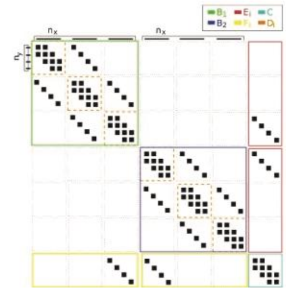
divide et impera - eine Anwendung aus der Numerischen Mathematik

Diplomand
Lukas Tuggener

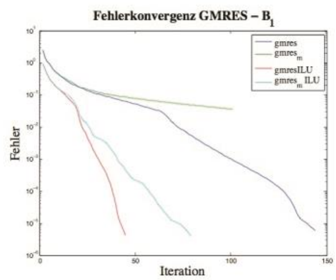
Dozent
Heinz Ungricht

Diese Arbeit betrachtet grosse, schwach besetzte lineare Gleichungssysteme der Form Ax=b, wie sie aus der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen entstehen.
Im ersten Abschnitt wird darauf eingegangen, wie ein kontinuierliches Problem anhand der Methode der finiten Differenzen diskretisiert werden kann. Auf diese Weise kann das Problem für gewünschte Randbedingungen approximiert werden.
Im Hauptteil wird als erstes auf die Domain Decomposition Methods (divide and conquer) eingegangen. Das sind Methoden, die alle darauf aufbauen, das ursprüngliche Problem in Teilprobleme zu zerlegen. Diese Teilprobleme werden danach unabhängig voneinander gelöst und danach zur Gesamtlösung zusammengefügt. Im speziellen werden dabei die Block-Gauss Zerlegung von A, sowie Schurkomplement basierte Ansätze behandelt. Ebenfalls wird ein Fast Poisson Sover betrachtet. Ein Verfahren, das im Spezialfall der Poissongleichung, das resultierende System sehr effizient lösen kann. Da die Teilprobleme, bezüglich Speicherbedarf und Rechenaufwand, oftmals immer noch zu aufwändig sind für eine direkte Lösung, werden in einem weiteren Kapitel einige Verfahren zur iterativen Lösung von linearen Gleichungssystemen vorgestellt. Als erstes werden die klassischen Splitting Verfahren wie Jacobi und Gauss-Seidel, sowie die zugehörigen Relaxationsverfahren besprochen. Danach wird das modernere Krylov-Unterraum Verfahren GMRES, sowie die modifizierte Version GMRES(m) hergeleitet.
Um das behandelte Themengebiet abzurunden wird anschliessend die Vorkonditionierung von linearen Gleichungssystemen betrachtet. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der unvollständigen LU Zerlegung, auch ILU Zerlegung genannt.
Im letzten Kapitel werden die verschiedenen Verfahren getestet. Dabei werden die Poisson sowie die Konvektions-Diffusions Gleichung als Testbeispiele verwendet. Im Vordergrund steht dabei die Konvergenzgeschwindikeit, das heisst, es wird untersucht, wie viele Iterationen die jeweiligen Verfahren benötigen um das System Ax = b mit einer vorgegebenen Genauigkeit zu lösen.

Schlüsselwörter: Partielle Differentialgleichung, Poissongleichung, Konvektions-Diffusionsgleichung, Finite Differenzen, Domain Decompositon Methods, Schur-Komplement, Block-Gauss, Iterative Verfahren, Jacobi, Gauss-Seidel, Krylov-Unterraum, GMRES, ILU, Vorkonditionierung



Struktur der Systemmatrix der Diskretisierung des Laplaceoperators auf einem rechteckigen Grundgebiet mit zwei Teilgebieten. B1 und B2 beschreiben die Gleichungen im Innern der Teilgebiete, C beschreibt die Gleichungen für das verbindende Interface.



Fehlerkonvergenz von verschiedenen Varianten des GMRES Verfahrens. Gelöst wird das Gleichungssystem der Diskretisierung der Poissongleichung mit Dirichlet und Neumann Rändern.